УДК 005.8 DOI: 10.20998/2413-3000.2022.5.10

Л. С. ЧЕРНОВА, С. Д. ТИТОВ, Л. С.ЧЕРНОВА

СПРОЩЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРОЄКТНОМУ МЕНЕДЖМЕНТІ

Математичне моделювання сучасних процесів управління може бути зведено до розв'язку задач лінійної оптимізації (ЛО). Для дослідження та розв'язку задач ЛО застосовують бібліотеку програм відомих комп'ютерних пакетів Mathematica®, Maple®, MathCad®. Це дозволяє розв'язувати складні типи комбінаторних задач цілочислової лінійної оптимізації та виконувати розв'язок задач великої вимірності. Методи точного або наближеного розв'язку таких задач вивчаються з урахуванням належності їх до, так званих, задач з класу P та NP (алгоритми поліноміальної та експоненціальної реалізації розв'язку). Сучасні комп'ютерні комбінаторні методи для розв'язку задач ЛО потребують розробки алгоритмів, які дозволяють отримувати наближений розв'язок з гарантованою оцінкою значення цільової функції. Важливе значення має спрощення математичної моделі до початку комп'ютерної реалізації. Така доцільність стимулює вдосконалення існуючих алгоритмів підготовки до комп'ютерних розрахунків. Застосування таких алгоритмів дозволить суттєво скоротити комп'ютерний час розрахунків та зменшити апаратні вимоги до комп'ютера. Пред'явлена робота присвячена побудові ланцюга ефективних алгоритмів, які спрощують первісну математичну модель задачі та реалізацію її комп'ютерного розрахунку. Метою роботи є використання та розробка ефективних алгоритмів та підготовка математичних моделей теорії ЛО з подальшою реалізацією їх розв'язку на комп'ютері.

Ключові слова: лінійна оптимізація; поліедр; цільова функція; симплекс-метод; базисні вектори; первісний план; опорний план; вершина поліедру; редукція; двоїстість.

Л. С. ЧЕРНОВА, С. Д. ТИТОВ, Л. С.ЧЕРНОВА

УПРОЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОЕКТНОМ МЕНЕДЖМЕНТЕ

Математическое моделирование современных процессов управления может быть сведено к решению задач линейной оптимизации (ЛО). Для исследования и решения задач (ЛО) используют библиотеку программ известных компьютерных пакетов Mathematica®, Maple®, MathCad®. Это позволяет решать сложные типы комбинаторных задач целочисленной линейной оптимизации и выполнять решение задач большой измеримости. Методы точного или приближенного решения таких задач изучаются с учетом принадлежности их к так называемым задачам класса P и NP (алгоритмы полиномиальной и экспоненциальной реализации решения). Современные компьютерные комбинаторные методы для решения задач ЛО требуют разработки алгоритмов, позволяющих получать приближенное решение с гарантированной оценкой значения целевой функции. Важное значение имеет упрощение подготовленной к началу компьютерной реализации математической модели. Такая целесообразность стимулирует усовершенствование алгоритмов подготовки к компьютерным расчетам. Применение таких алгоритмов позволит существенно сократить время расчетов и уменьшить аппаратные требования к компьютеру. Предъявленная работа посвящена построению цепи эффективных алгоритмов, упрощающих первоначальную математическую модель задачи и реализацию ее компьютерного расчета. Целью работы является использование и разработка эффективных алгоритмов, подготовка математических моделей теории ЛО с дальнейшим их решением на компьютере.

Ключевые слова: линейная оптимизация; полиэдр; целевая функция; симплекс метод; базисные векторы; первоначальный план; опорный план; вершина полиэдра; редукция; двойственность.

LB. CHERNOVA, S. TITOV, LD. CHERNOVA

THE SIMPLIFYING OF THE SOLUTION OF LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS IN PROJECT MANAGEMENT

Modern mathematic models of project management processes description can be use in many cases to linear optimization problems. Simplification algorithms provide an efficient method of searching for solution of an optimization problem. If we project a multidimensional process onto a two-dimensional plane, this method will enable graphic visualization of the problem solution matrixes. A significant simplification of the algorithms for preparing the linear optimization problem in computer calculations can be achieved using the concept of duality in linear optimization problems. The linear optimization problem forms are equivalent. This can be achieved provided that transformation techniques are used to move from one form of tasks to another. To simplify the transformation of linear optimization problems, the transition from maximizing to minimizing the objective function is used. This research has proposed a method of simplifying the combinatorial solution of a discrete optimization problem. It is based on decomposition of the system representing a system of constraints of a five-dimensional initial problem into the two-dimensional coordinate plane. There was a model example considered for solving a five-dimensional linear optimization problem based on such projecting of a multidimensional space onto the two-dimensional one. The paper is concerned with construction of a chain of efficient algorithms to simplify the primary mathematic model of problem and realization its computer-aided calculation. Applied value of the proposed approach consists in using the scientific result for enabling the possibility to improve canonical methods of optimization problem solution and, respectively, for simplification of computer-assisted calculation.

Keywords: linear optimization; polyhedron; objective function; simplex method; basis vectors; original design; support design; polyhedron vertex; reduction; duality.

Вступ. Лінійна оптимізація у більшості випадків використовує для розв'язку своїх задач канонічні класичні алгоритми [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Типові задачі містять стандартні кроки алгоритму: отримання початкового опорного плану, побудова ланцюга опорних планів, оцінку їх оптимальності, покращення плану та значення цільової функції [7, 8, 9, 10]. Кожен з опорних планів має набір лінійно незалежних базисних векторів. Перехід до нового базису, який являє собою, ні що інше, як перехід по ребру у сусідню вершину поліедру, здійснюється в межах строгого алгоритму. Як стверджує теорія алгоритму симплекс-методу перехід виконують у напрямку найкращої зміни значень цільової функції [11, 12].

Така вимога алгоритму в деяких задачах лінійної оптимізації може привести до появи надмірно великої кількості ітерацій у порівнянні з переходом не у сусідню вершину а іншу, яку можливо визначити за додатковими вимогами.

Сучасні математичні моделі опису процесів управління в багатьох випадках можуть бути зведені до задач лінійної оптимізації (ЛО). [1,2] Для дослідження та розв'язку таких задач дослідники застосовують бібліотеку підпрограм відомих комп'ютерних пакетів Mathematica®, Maple®, MathCad®. Комп'ютерна реалізація розрахунків дозволяє розв'язувати складні типи комбінаторних задач цілочислової лінійної оптимізації та виконувати розв'язок задач великої вимірності.[10,11]

Для таких задач важливе значення має вдосконалення до початку комп'ютерної реалізації самої математичної моделі. Така практична доцільність для широкого кола задач ЛО стимулює розробку нових та вдосконалення існуючих алгоритмів підготовки до комп'ютерних розрахунків. [14] Застосування таких алгоритмів дозволить скоротити комп'ютерний час розрахунків та зменшити вимоги до апаратних компонент комп'ютера.

Робота присвячена побудові ланцюга ефективних алгоритмів, які спрощують первісну математичну модель задачі та реалізацію її комп'ютерного розрахунку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В багатьох випадках математичні моделі управління активними системами інтерпретуються у вигляді задач лінійної оптимізації [1, 2, 3, 11, 12].

Алгоритми спрощення є ефективним прийомом пошуку розв'язку оптимізаційної задачі. Якщо виконати відображення багатовимірного процесу на двовимірну площину, то такий прийом дозволить наочно відобразити у графічній формі множини розв'язків задачі. В рамках даного дослідження запропоновано спосіб спрощення комбінаторного розв'язку задачі дискретної оптимізації. Він заснований на тому, що виконується декомпозиція системи, яка відображає систему обмежень п'ятивимірної вихідної задачі на двовимірну координатну площину. Такий спосіб дозволяє отримати просту систему графічних розв'язків складної задачі лінійної дискретної оптимізації. З практичної точки зору запропонований метод дозволяє спростити обчислювальну складність оптимізаційних задач такого класу.

Розв'язок задач лінійної оптимізації ґрунтується на алгоритмі класичного або звичайного симплекс-методу. Сутність його полягає в інтелектуальному переборі вершин поліедру Ω_I (припустимої області оптимізаційної задачі). План або вершина поліедру ΩI задається системою n базисних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Кількість можливих вершин поліедру дорівнює числу комбінацій C_n^m (n – вимірність задачі, а $m = rang(\Omega_I)$). Реальні задачі лінійної оптимізації, які інтерпретують моделі управління, відзначаються великими значеннями m. Тому, необхідно було отримати алгоритм, який забезпечує впорядкований перебір кутових точок поліедру. Такий метод був розроблений [1, 2] та називається симплекс-методом. Він дозволяє від відомого первісного опорного плану X_0, за скінчену кількість кроків отримати оптимальний розв'язок оптимізаційної задачі. Кожен ітераційний крок симплекс-методу відповідає новому плану, який покращує значення цільової функції. Алгоритмічний процес продовжується до тих пір, поки не буде знайдено оптимальне значення цільової функції або відсутність розв'язку оптимізаційної задачі.

Кількість ітерацій симплекс-методу визначається первісним опорним планом X_0 та кількістю кутових точок Ω_I. Оскільки ланцюгів переходу від X_0 до оптимальної X_{opt} декілька, то виникає потреба знаходження найкоротшого (з точки зору кількості вершин) ітераційного «шляху». На цей час в літературі відсутні такі оцінки та порівняння їх з класичним алгоритмом симплекс-методу.

Метою статті є використання та розробка ефективних алгоритмів та підготовка математичних моделей теорії ЛО з подальшою реалізацією їх розв'язку на комп'ютері. Для досягнення поставленої мети були поставлені такі завдання: навести загальну постановку задач побудови ефективних алгоритмів; навести модельні приклади, які ілюструють ефективність алгоритмів на етапі комп'ютерного розрахунку.

Виклад основного матеріалу. Редукція в загальних задачах ЛО. Не порушуючи загальності міркувань, нехай маємо задачу лінійної оптимізації, поданої у канонічній формі:

$$\begin{gathered} W_I = CX \to \max \\ \Omega_I : AX = B, \\ X \ge 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де ранг матриці коефіцієнтів системи обмежень рівний rang $A = m$.

Тоді розв'язуючи систему методом Жордано-Гаусса за довільною базисною комбінацією змінних отримаємо проекцію n-вимірної вихідної задачі на (n – m) – вимірний простір(n – кількість змінних вихідної задачі). У разі $n - m = 2$ маємо проектування на двовимірну площину.

Розглянемо модельний приклад розв'язку п'ятивимірної задачі лінійної оптимізації, яка ґрунтується на такому проектуванні багатовимірного простору на двовимірний простір.

Модельний приклад № 1.

Задачу лінійної оптимізації розв'язати методом проектування на двовимірні координатні площини

$$\begin{gathered} W_I = 4x_1 + 14x_2 + 2x_3 - 100 \to \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} 5x_1 + 11x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 118, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_5 = -28, \\ 7x_1 + 6x_2 + x_4 + 5x_5 = 101, \end{cases} \\ x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{gathered} \tag{2}$$

Розв'язок. Метод проектування або спрощення задачі лінійної оптимізації (ЛО) полягає у переході від канонічної форми представлення задачі ЛО до стандартної. Такий перехід виконують розв'язком системи методом Жордана-Гаусса. В якості базисних змінних обираємо довільні змінні, на початку візьмемо таку трійку – x_3, x_4, x_5. В результаті виключення маємо розв'язану систему

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 11, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 50, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 79. \end{cases} \quad (3)$$

Відкидаючи невід'ємні базисні змінні, забезпечуємо проектування вихідної багатовимірної задачі на двовимірну координатну площину 0 x_1 x_2 :

$$W_{\mathrm{I}} = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$\Omega_{\mathrm{I}}^{Ox_1x_2} : \begin{cases} x_1 \le 11, \\ x_1 + 5x_2 \le 50, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 79, \end{cases} \quad (4)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.

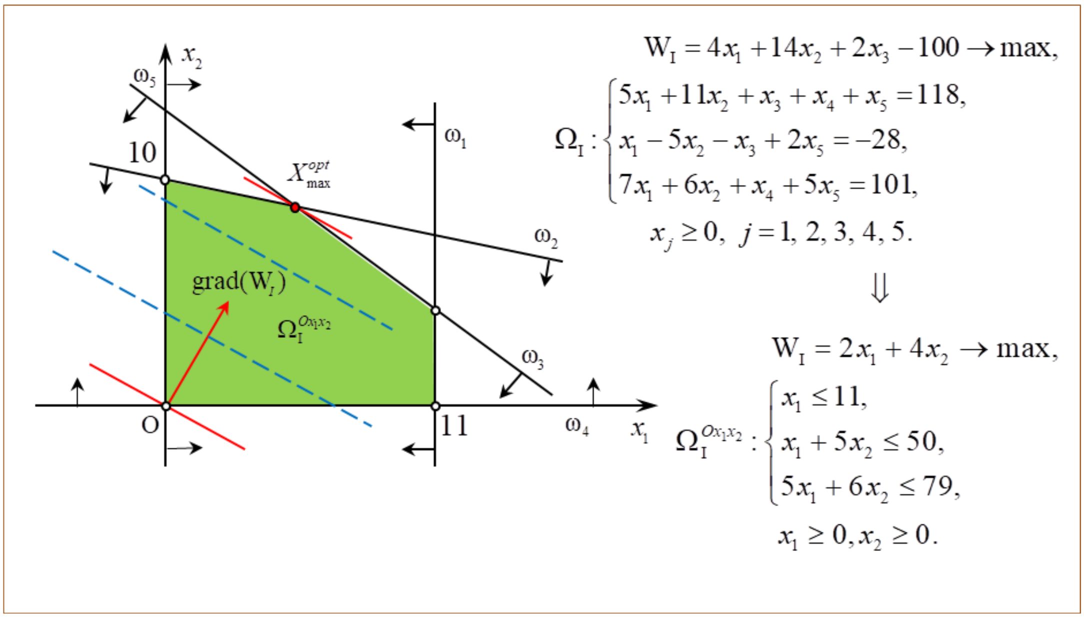

Рис. 1. Графічний метод розв'язку. Проекція на О x_1 x_2

Координати оптимальної вершини знаходимо з розв'язку системи

$$X_{\max}^{opt} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 50, \\ 5x_1 + 6x_2 = 79, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 5, \\ x_2 = 9. \end{bmatrix} \quad (5)$$

Оптимальний розв'язок вихідної задачі обчислюємо з (2):

$$X_{\max}^{\mathrm{opt}} = [\ 5, 9, 0, 0, 6\ ] \quad (6)$$

Максимальне значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 46$.

Прискорення збіжності розв'язку задачі ЛО.

У більшості випадків, пошук розв'язку задач лінійної оптимізації, виконується симплексним методом. Але цей класичний алгоритм розв'язку лінійних задач оптимізації може давати додаткові ітерації в процедурі безпосереднього обчислення. Якщо порушити деякі складові стандартного алгоритму симплекс-методу, то можливо прискорити збіжність симплексного розрахунку – зменшити кількість симплекс-таблиць.

Пропонується для прискорення збіжності симплекс-методу відхилятися від канонічного алгоритму. В якості наступного плану задачі обирати не сусідню вершину, а уточнену, яка обирається на підставі оцінки найбільших та найменших значень цільової функції.

Розглянемо загальний підхід до розв'язку лінійної оптимізаційної задачі за класичним алгоритмом симплекс-методу.[1,2,3]

Головною ідеєю алгоритму симплекс-методу є послідовний перебір припустимих опорних планів. Виключення одного вектора з базису і залучення другого виконується методом Жордано-Гаусса [13]. У разі дотримання цих критеріїв складається ланцюг. Початок якого знаходиться в стартовій вершині $\mathbf{X}_0$ поліедру Ω_{I} і відповідає першій симплекс-таблиці розрахунків. Перехід до наступного опорного плану $\mathbf{X}_1$ за класичним алгоритмом відповідає переходу до сусідньої вершини. Фактично кожна таблиця є числовим описом вершин Ω_{I}. Процес продовжують до тих пір поки не буде знайдена оптимальна вершина $\mathbf{X}_{\mathrm{opt}}$ або доведена її відсутність.

На довільному кроці розрахунків за звичайним алгоритмом симплекс-методу існує можливість переходу не в сусідню вершину, а в довільну, яка розташована в околі оптимальної вершини. Вибір такої вершини можливо виконувати на базі багатьох оціночних методів, наприклад, половинного ділення. При такому обиранні альтернативний ланцюг симплексного розрахунку може мати значно меншу кількість ітерацій.

Розглянемо модельний приклад розв'язку двовимірної задачі лінійної оптимізації для підтвердження такого випадку. Спочатку за стандартною методикою, а потім з порушенням правила обирання комбінації базисних векторів.

Модельний приклад №2.

Розв'язати задачу ЛО.

$$\mathrm{W_I} = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\Omega_{\mathrm{I}}: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 4x_2 \le 36, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 37, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 19, \\ x_1 - 6x_2 \le 0, \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язок.

Первісний опорний план $\mathbf{X}_0 = [\ 0,\ 0,\ 12,\ 36,\ 37,\ 19,\ 0\ ] \in \Omega_{\mathrm{I}}$. Складаємо вихідну симплексну таблицю 1.

Після подальших відповідних обчислень на п'ятому кроці маємо симплексну таблицю (Табл. № 2).

Таблиця 1 – Вихідна симплекс-таблиця

Basis	*C*	*B*	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\{b_j / a_{ij}\}$	X_i
			3	4	0	0	0	0	0		
a_3	0	12	-1	2	1	0	0	0	0	6	X_0
a_4	0	36	1	4	0	1	0	0	0	9	
a_5	0	37	2	3	0	0	1	0	0	37/3	
a_6	0	19	4	-5	0	0	0	1	0		
a_7	0	0	1	-6	0	0	0	0	1		
Δ_j	$W_I(X_0) =$	0	-3	-4	0	0	0	0	0		

Таблиця 2 – Завершальна симплекс-таблиця

Basis	*C*	*B*	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\{b_j / a_{ij}\}$	X_i
			3	4	0	0	0	0	0		
a_3	4	5	0	1	0	0	2/11	-1/11	0		$X_{\max}$
a_4	3	11	1	0	0	0	5/22	3/22	0		
a_5	0	13	0	0	1	0	-3/22	0	0		
a_6	0	5	0	0	0	1	-21/22	5/22	0		
a_7	0	19	0	0	0	0	19/22	-15/22	1		
Δ_j	$W_I(X_{\max}) =$	53	0	0	0	0	31/22	1/22	0		

Всі оцінки невід'ємні $\Delta_j \ge 0$. Це означає, що знайдено оптимальний розв'язок.

$$\mathbf{X}_{\max} = [\ 11,\ 5\ ],\ \mathrm{W_I}(\mathbf{X}_{\max}) = 53. \qquad (8)$$

Таким чином, розрахунок в межах класичного симплекс-методу містить наступний ланцюг $\mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_3 \to \mathbf{X}_{\max}$ послідовного перебору вершин поліедру Ω_{I}.

Доведемо, що порушення алгоритму симплексного методу може суттєво зменшити довжину ланцюгу розрахунку. Обираємо серед від'ємних оцінок не найменшу як у звичайному симплекс-методу, а найбільшу. Відповідні розрахунки наведено у табл. 3.

Таблиця 3 – Симплекс-таблиці з порушенням класичного алгоритму

Basis	*C*	*B*	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\{b_j / a_{ij}\}$	X_i
			3	4	0	0	0	0	0		
a_3	0	12	-1	2	1	0	0	0	0		X_0
a_4	0	36	1	4	0	1	0	0	0		
a_5	0	37	2	3	0	0	1	0	0		
a_6	0	19	4	-5	0	0	0	1	0		
a_7	0	0	1	-6	0	0	0	0	1		
Δ_j	$W_I(X_0) =$	0	-3	-4	0	0	0	0	0		
a_3	0	13	0	0	1	0	-3/22	7/22	0		Xmax
a_4	0	5	0	0	0	1	-21/22	5/22	0		
a_5	0	19	0	0	0	0	19/22	-15/22	1		
a_6	4	5	0	1	0	0	2/11	-1/11	0		
a_7	3	11	1	0	0	0	5/22	3/22	0		
Δ_j	$W_I(X_{\max}) =$	53	0	0	0	0	31/22	1/22	0		

Ланцюг розрахунку суттєво скорочено - $\mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}_4 \to \mathbf{X}_{\max}$.

Виконаємо графічний розв'язок задачі, який дозволить геометрично проінтерпретувати ланцюги розрахунку (рис.2).

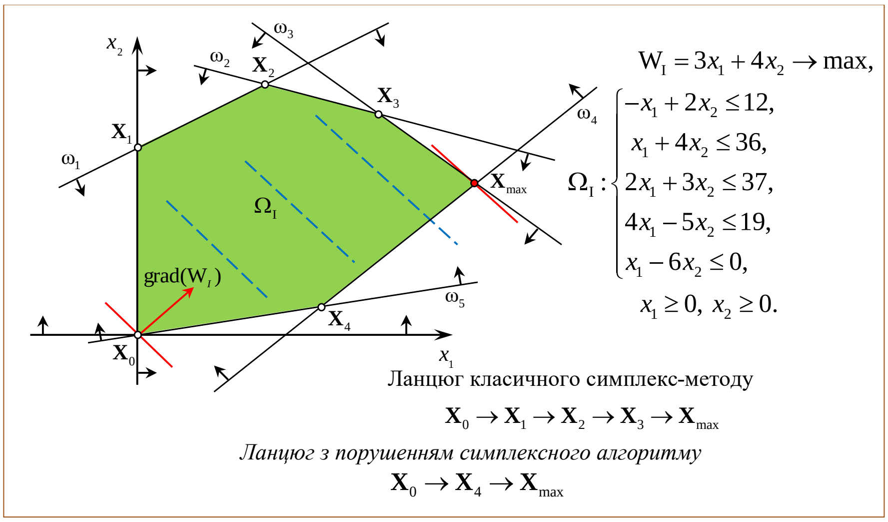

Рис. 2. Геометрична інтерпретація розрахунків класичного та з порушенням алгоритму симплекс-методу

Таким чином, для розв'язку задачі за класичним алгоритмом необхідно скласти п'ять симплекс-таблиць.

З метою скорочення кількості ітерацій порушено цей алгоритм і в початковій симплекс-таблиці обрано не найменшу, а найбільшу від'ємну оцінку $\Delta_1 = -3$. Подальші обчислення наведені в Табл. № 3. Кількість симплекс-таблиць скоротилася з п'яти до трьох $\mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}_4 \to \mathbf{X}_{\max}$.

Висновки. Розглянуті модельні приклади підвищення ефективності алгоритмів підготовки оптимізаційної задачі до розрахунків на основі редукції задачі та прийому порушення стандартного симплексного алгоритму, доводять доцільність таких прийомів у розв’язку задач лінійної оптимізації. З практичної точки зору такий підхід дозволяє спростити складність вихідних задач такого класу.

На базі порівняльних розв’язків модельних задач показано спрощення розв’язків вихідних задач. Отриманий науковий результат дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку доцільно виконувати пошук порушення алгоритму стандартних алгоритмічних схем , які склалися на цей час.

Прикладною цінністю запропонованого підходу є використання отриманого наукового результату для забезпечення можливості вдосконалення канонічних прийомів розв’язку оптимізаційних задач та, відповідно, спрощення комп’ютерного розрахунку з використанням бібліотек стандартних підпрограм відомих математичних пакетів.

Показано, що існують класи задач лінійної оптимізації, для яких є раціональним пошук більш ефективних алгоритмів, з метою підготовки задач ЛО до комп’ютерного розрахунку. Доведено на прикладі ілюстративного розв’язання типових модельних задач, що запропонований підхід може дозволити суттєво спростити розв’язок задач ЛО.

Список літератури

1. Данциг Дж. *Линейное программирование, его применение и обобщение*. М., 1966. 600 с.
2. Канторович Л. В., Горстко А. Б. *Оптимальные решения в экономике*. М., Наука, 1972. 227 с.
3. Unger N., Dempe S. *Lineare Optimierung.* Wiesbaden, Springer, 2010. 142 s.
4. Гетманцев В. Д. *Лінійна алгебра і лінійне програмування*. Київ, Либідь, 2001. 250 с.
5. Багаєнко І. М. ,Григорків В.С., Бойчук М. В., Рюмшин М. О. *Математичне програмування*. Київ, 1996. 266 с.
6. Teschl Gerald, Teschl Susanne. *Mathematik für Informatiker. Band 1*: *Diskrete Mathematik und Lineare Algebra.* Berlin, Springer, 2008. 519 s. DOI: 10.1007/978-3-540-77432-7
7. Бугір М.К. *Лінійна алгебра, лінійні моделі.* К., Академія, 1998. 237с.
8. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями.* Л., 1984, 176 с.
9. Ашманов С. А. *Линейное программирование*. М., 1981. 304 с.
10. Сигал И.Х., Иванова А.П. *Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы*. М., 2003, 240 с.
11. Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М. *Математичне програмування*. Київ, 1996. 312 с.
12. Степанюк В. В. *Методи математичного програмування*. Київ, 1984. 272 с.
13. Титов С.Д., Чернова Л.С. *Вища та прикладна математика: Навч. посібник: У 2-х ч*., Ч. 1., Харків, Факт, 2017. 336 с.
14. Chernov S., Titov S., Chernova Ld., Gogunskii V., Chernova Lb., Kolesnikova K. Algorithm for the simplification of solution to discrete optimization problems. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies*. 2018, № 3/4 (93), pp. 34 – 43. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.133405

References (transliterated)

1. Dantsig Dzh. *Lineynoe programmirovanie, ego primenenie i obobschenie* [Linear programming, its application and generalization]. M., 1966. 600 p.
2. Kantorovich L. V., Gorstko A. B. *Optimalnyie resheniya v ekonomike* [Optimal solutions in the economy]. M., Nauka, 1972. 227 p.
3. Unger N., Dempe S. *Lineare Optimierung.* Wiesbaden, Springer, 2010. 142 s.
4. Hetmantsev V. D. *Liniina alhebra i liniine prohramuvannia* [Linear algebra and linear programming]. Kyiv, Lybid, 2001. 250 p.
5. Bahaienko I. M., Hryhorkiv V.S., Boichuk M. V., Riumshyn M. O. Matematychne prohramuvannia [Mathematical programming]. Kyiv, 1996. 266 p.
6. Teschl Gerald, Teschl Susanne. *Mathematik für Informatiker. Band 1*: *Diskrete Mathematik und Lineare Algebra.* Berlin, Springer, 2008. 519 s. DOI: 10.1007/978-3-540-77432-7
7. Buhir M.K. Liniina alhebra, liniini modeli [Linear algebra, linear models]. K., Academy, 1998. 237p.
8. Gavurin M. K., Malozemov V. N. *Ekstremalnyie zadachi s lineynyimi ogranicheniyami* [Extremal Problems with Linear Constraints]. L., 1984, 176 p.
9. Ashmanov S. A. *Lineynoe programmirovanie* [Linear programming]. M., 1981. 304 p.
10. Sigal I.H., Ivanova A.P. *Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovanie: modeli i vyichislitelnyie algoritmyi* [Introduction to Applied Discrete Programming: Models and Computational Algorithms]. M., 2003, 240 p.
11. Romaniuk T. P., Tereshchenko T. O., Prysenko H. V., Horodkova I. M. *Matematychne prohramuvannia* [Mathematical programming]. Kyiv, 1996. 312 p.
12. Stepaniuk V. V. *Metody matematychnoho prohramuvannia* [Methods of mathematical programming]. Kyiv, 1984. 272 p.
13. Tytov S.D., Chernova L.S. *Vyshcha ta prykladna matematyka: Navch. posibnyk: U 2-kh ch.* [Higher and Applied Mathematics: Textbook. manual: In 2 hours]
14. Chernov S., Titov S., Chernova Ld., Gogunskii V., Chernova Lb., Kolesnikova K. Algorithm for the simplification of solution to discrete optimization problems. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies*. 2018, № 3/4 (93), pp. 34 – 43. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.133405

Надійшла (received) 09.01.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Чернова Любава Сергіївна (Чернова Любава Сергеевна, Chernova Liubava) – кандидат технічних наук, доцент, Національний університет кораблебудування імені Адмірала Макарова, м. Миколаїв, доцент кафедри інформаційних керуючих систем та технологій; e-mail: 19chls92@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7846-9034.

Титов Сергій Дмитрович (Титов Сергей Дмитриевич, Titov Sergiy) – доцент, Національний університет кораблебудування імені Адмірала Макарова, м. Миколаїв, доцент кафедри вищої математики; e-mail: ss1-ss10@ukr.net; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8772-9889.

Чернова Людмила Сергіївна (Чернова Людмила Сергеевна, Chernova Lyudmila) – доктор технічних наук, доцент, Національний університет кораблебудування імені Адмірала Макарова, м.Миколаїв, доцент кафедри інформаційних керуючих систем та технологій; e-mail: lyudmilachernova@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0666-0742.