ISSN 2311-4738 (print), ISSN 2413-3000 (online)

УДК 005.8:51 DOI: 10.20998/2413-3000.2024.9.10

Лб. С. ЧЕРНОВА, С. Д. ТИТОВ, І. А. ЖУРАВЕЛЬ, Лд. С. ЧЕРНОВА

ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ В ДРОБОВО-ЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ В УПРАВЛІННІ ПРОЄКТАМИ

Ефективне планування ресурсів та оптимізація графіку робіт дозволяє мінімізувати витрати і дотримуватися термінів виконання проєкту, що забезпечує якість результатів. Багато реальних проєктів включають складні взаємозалежності та обмеження, що можуть бути описані нелінійними моделями, ускладнюючи процес їх оптимізації. Використання загального алгоритму лінеаризації для нелінійних задач оптимізації пропонує інноваційний підхід до спрощення і розв'язання складних задач планування. Лінеаризація дозволяє перетворити нелінійні моделі на більш зручні для обчислення лінійні форми, що полегшує застосування методів лінійного програмування. Це особливо важливо в умовах обмежених ресурсів та строгих обмежень на час і бюджет проєкту. Якщо проєкт має складний графік з багатьма взаємозалежними задачами, а також обмеженими ресурсами, вважаємо, що вихідна модель містить нелінійні обмеження, наприклад, залежності між різними задачами, що впливають на тривалість та використання ресурсів. Використовуючи методи лінеаризації, такі як заміна нелінійних обмежень лінійними наближеннями або використання часткових похідних для локальної лінеаризації, можна спростити задачу до лінійної форми. Після лінеаризації застосовують лінійні методи оптимізації, такі як лінійне програмування, для визначення оптимального розподілу ресурсів і графіку виконання задач. Одним із найпоширеніших прикладів використання дробово-лінійної оптимізації в управлінні проєктами є задача мінімізації витрат на одиницю часу або ресурсу при максимальному підвищенні якості виконання задач. Наприклад, при плануванні будівельного проєкту менеджери можуть використовувати дробові лінійні моделі для оптимізації витрат на будівельні матеріали та робочу силу, забезпечуючи при цьому високу якість робіт і гарне виконання віх графіка.

Ключові слова: дробово-лінійна оптимізація, управління проєктами, ресурси, алгоритм лінеаризації, управління ризиками.

Liub. CHERNOVA, S. TITOV, I. ZHURAVEL, Liud. CHERNOVA

APPLICATION OF THE GENERAL ALGORITHM OF LINEARIZATION IN LINEAR FRACTIONAL OPTIMIZATION PROBLEMS IN PROJECT MANAGEMENT

Effective planning of resources and optimization of the work schedule allows you to minimize costs and adhere to project deadlines, which ensures the quality of results. Many real projects include complex interdependencies and constraints that can be described by nonlinear models, complicating the process of their optimization. The use of a general linearization algorithm for nonlinear optimization problems offers an innovative approach to simplifying and solving complex planning problems. Linearization makes it possible to transform non-linear models into linear forms that are more convenient for calculation, which facilitates the application of linear programming methods. This is especially important in conditions of limited resources and strict constraints on the time and budget of the project. If the project has a complex schedule with many interdependent tasks, as well as limited resources, we believe that the original model contains nonlinear constraints, for example, dependencies between different tasks that affect the duration and use of resources. Using linearization techniques, such as replacing nonlinear constraints with linear approximations or using partial derivatives for local linearization, the problem can be simplified to a linear form. After linearization, linear optimization methods, such as linear programming, are used to determine the optimal resource allocation and task execution schedule.One of the most common examples of using the linear fractional optimization in project management is given by a problem of minimizing the expense per a unit of time or resource while maximizing the tasks completion quality. For example, in planning of a construction project, managers can use linear fractional models for optimizing the expense for construction materials and manpower with ensuring a high quality of works and good meeting of the schedule milestones at the same time.

Keywords: linear fractional optimization, project management, resources, linearization algorithm, risk management.

Вступ. У сучасному світі, що стрімко розвивається, інформаційні технології стають фундаментом для вирішення складних задач в різних галузях науки та промисловості. Однією з таких важливих областей є оптимізація, яка надає можливість знаходити найкращі рішення для досягнення бажаних результатів при мінімізації витрат або максимізації ефективності.

Задачі дробово-лінійної оптимізації виникають у багатьох реальних ситуаціях, коли необхідно оптимізувати співвідношення між кількома параметрами. Наприклад, це може бути задача мінімізації собівартості продукції при збереженні певного рівня якості або максимізації прибутку при обмежених ресурсах. Такі задачі часто мають нелінійну природу, що ускладнює їх розв’язання за допомогою традиційних методів лінійного програмування. Тому одним із важливих напрямків дослідження є лінеаризація таких задач, яка дозволяє застосувати ефективні алгоритми лінійної оптимізації.

Дробово-лінійна оптимізація в управлінні проєктами є одним із найефективніших підходів для вирішення складних завдань, пов'язаних із плануванням, розподілом ресурсів та управлінням ризиками. Цей метод дозволяє оптимізувати співвідношення між кількома важливими параметрами проєкту, такими як вартість, час, якість виконання та інші показники, що мають вирішальне значення для успішного завершення проєкту.

Мета роботи. Дробово-лінійна оптимізація відрізняється від традиційних методів тим, що цільова функція в таких задачах має вигляд дробу, де чисельник і знаменник є лінійними функціями. Наприклад, це може бути співвідношення витрат до кількості виконаних робіт або часу виконання проєкту до рівня його якості.

Метою роботи є дослідити задачі такого типу, що часто виникають у реальному житті, особливо в управлінні проєктами, і знайти оптимальне співвідношення між різними ресурсами та результатами.

Використовуючи дробово-лінійну оптимізацію, можна мінімізувати витрати на одиницю продуктивності або збільшити продуктивність при обмеженому бюджеті, що є ключовим для успішного завершення проєкту.

Виклад основного матеріалу. Одним з найпоширеніших прикладів застосування дробово-лінійної оптимізації в управлінні проєктами є задача мінімізації витрат на одиницю часу або ресурсу при максимізації якості виконання завдань.

Оскільки дробово-лінійні задачі складно розв'язувати за допомогою традиційних методів оптимізації, їх часто лінеаризують, тобто перетворюють у лінійну форму. Це досягається шляхом введення нових змінних, які дозволяють звести дробову функцію до лінійної, після чого застосовуються стандартні методи лінійного програмування, такі як симплекс-метод.

Дробово-лінійна оптимізація також знаходить застосування у ризик-менеджменті. У проєктному управлінні ризики часто вимірюються у вигляді добутку ймовірності певної події до її наслідків. За допомогою дробово-лінійної оптимізації можна мінімізувати потенційні втрати, одночасно максимізуючи ефективність заходів з управління ризиками.

Переваги дробово-лінійної оптимізації включають можливість врахування складних взаємозв'язків між різними параметрами проєкту, що дозволяє отримувати більш точні та збалансовані рішення. Вона також надає гнучкість у прийнятті рішень, оскільки менеджери можуть моделювати різні сценарії розвитку подій та вибирати найоптимальніший шлях.

Однак, слід зазначити, що дробово-лінійна оптимізація є складнішою з обчислювальної точки зору. Вона потребує значних ресурсів для розв'язання та може вимагати спеціалізованих алгоритмів і програмного забезпечення. Це становить певний виклик для її застосування в реальних проєктах, особливо у випадках з великою кількістю змінних та обмежень.

В математичних моделях задач оптимізації мішаного управління проєктами часто використовується нелінійні цільові функції вигляду:

$$W_I == \frac{P_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}{Q_1(x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j},$$

де

$$x_j \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n,$$

$$c_j, \ d_j \ - const, \quad \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0.$$

Аналогічні нелінійні цільові функції також застосовують для математичних моделей економічного напрямку:

Цільова функція моделі оптимізації рентабельності витрат на виробництво продукції:

$$W_I = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to max,$$

де x_j – кількість, запланованої до випуску продукції,

c_j – прибуток, від реалізації одиниці продукції x_j,

d_j – собівартість, виробництва одиниці продукції x_j.

Цільова функція моделі оптимізації рентабельності продажу продукції:

$$W_I = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to max,$$

де x_j – кількість, запланованої до продажу продукції,

c_j – прибуток, від реалізації одиниці продукції x_j,

d_j – ціна, одиниці продукції x_j.

Цільова функція моделі оптимізації затрат з розрахунку на одну грошову одиницю товарної продукції:

$$W_I = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to min,$$

де x_j – кількість, запланованої до продажу продукції,

c_j – собівартість виробництва одиниці продукції x_j,

d_j – ціна, одиниці продукції x_j.

Цільова функція моделі оптимізації собівартості випуску продукції:

$$W_I = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \to min,$$

де x_j – кількість, випущеної продукції,

d_j – ціна, одиниці продукції x_j.

З огляду на це, важливим є лінеаризація цільових функцій моделей, з метою зведення математичної моделі до задачі лінійної оптимізації.

Відомо, що дробово-лінійною задачею оптимізації називають таку задачу оптимізації, в якій цільова функція є дробово-лінійною функцією, а система обмежень відповідає умовам лінійності, тобто є лінійними рівняннями або нерівностями.

Загальна задача дробово - лінійної оптимізації має наступний вигляд:

$$W_I = \frac{P_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}{Q_1(x_1,x_2,\dots,x_n)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to opt(\,max, min)$$

$$\Omega_1: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,\dots,n,$$

$$c_j, \ d_j \ b_i \ a_{ij} \ - const, \quad \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0.$$

Задачу дробово - лінійної оптимізації зведемо до розв'язку задачі лінійної оптимізації.

Позначимо $z_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}$, та введемо нові змінні: $z_j = z_0 x_j \;\; j = 1,2,\ldots,n$.

Задача (1) приймає вигляд:

$$W_{I\,z} = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j \;\; \to opt(max, min),$$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_{I\,z}\colon \begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1n}z_n - b_1 z_0 = 0, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \cdots + a_{2n}z_n - b_2 z_0 = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \cdots + a_{mn}z_n - b_m z_0 = 0, \end{cases} \\ \quad d_1 z_1 + d_2 z_2 + \cdots + d_n z_n = 1, \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$z_j \geq 0,\; z_0 > 0, i = 1,2,\ldots,m,\; j = 1,2,\ldots,n.$$

Додаткова задача (2) є сукупністю двох задач. Перша задача є задачею лінійної оптимізації, тому розв'язується симплекс-методом, а потім знаходять розв'язок вихідної задачі дробово-лінійної оптимізації. Друга задача, пов'язана з позначенням $z_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}$ для спрощення розв'язку задачі в цілому.

Модельний приклад № 1.

Знайти розв'язок задачі

$$W_I = \frac{2x_1 + 3x_2 - x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3 + 3} \to opt(max)$$

$$\Omega_I\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ -5x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 1,_I \end{cases} \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0$$

Маємо задачу дробово-лінійної оптимізації. В системі обмежень перейдемо від обмежень-нерівності до обмежень-рівнянь:

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ -5x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -5x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 = 1, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5.$$

Позначимо $z_0 = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + x_3 + 3}$, та введемо нові змінні:

$$z_1 = z_0 x_1,\; z_2 = z_0 x_2,\; \ldots,\; z_5 = z_0 x_5. \qquad (5)$$

Цільова функція додаткової задачі (2) приймає вигляд:

$$W_{I\,z} = 2z_1 + 3z_2 - z_3 \to opt(max, min).$$

Обидві частини рівнянь системи обмежень (4) помножимо на z_0 і перейдемо до нових змінних (5).

Додаткова задача (2) приймає вигляд:

$$W_{I\,z} = 2z_1 + 3z_2 - z_3 \to opt(max, min)$$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_{I\,z}\colon \begin{cases} -4z_0 + z_1 + 2z_2 + z_3 + z_4 = 0, \\ -z_0 - 5z_1 - z_2 - 3z_3 + z_5 = 0, \end{cases} \\ \quad 3z_0 + z_1 + 2z_2 + z_3 = 1, \end{array}\right. \qquad (6)$$

$$z_j \geq 0,\; z_0 > 0, j = 1,2,\ldots,5.$$

Відомо, що для початку розв'язку задачі лінійної оптимізації симплекс-методом необхідно отримати первісний опорний план Z_0. Для його знаходження використовуємо метод повного виключення Жордано-Гаусса. (Таблиця 1).

Таблиця 1 – Розрахунок за методом повного виключення Ж.-Гаусса

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	b	$\sum$
	–4	1	2	1	1	0	0	1
	–1	–5	–1	–3	0	1	0	–9
	3	1	2	1	0	0	1	8
W_{iz}	0	2	3	–1	0	0	0	
	–7	0	0	0	1	0	–1	–7
	8	–2	5	0	0	1	3	15
	3	1	2	1	0	0	1	8
W_{iz}	3	3	5	0	0	0	1	

Маємо $z_0 = [0,0,0,8,-7,15]$.

В таблиці 2 наведено симплекс-розрахунок додаткової задачі (6).

Таблиця 2 – Симплекс-розрахунок задачі (6)

Basis	*C*	*B*	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
			3	3	0	0	0	0
a_4	0	–1	–7	0	0	0	1	0
a_5	0	3	8	–2	5	0	0	1
a_3	0	1	3	1	2	1	0	0
Δ_j	$W_I(Z_0) = -1$		–3	–3	0	0	0	0
a_0	3	1/7	1	0	0	0	– 1/7	0
a_5	0	13/7	0	–2	5	0	8/7	1
a_3	0	4/7	0	1	2	1	3/7	0
Δ_j	$W_I(Z_1) = -4/7$		0	–3	0	0	– 3/7	0
a_0	3	1/7	1	0	0	0	– 1/7	0
a_5	0	3	0	0	9	2	2	1
a_1	3	4/7	0	1	2	1	3/7	0
Δ_j	$W_I(Z_2) = 8/7$		0	0	6	3	6/7	0

Оптимальний розв'язок додаткової задачі (6) рівний:

$$z_{opt} = z_2 = \left[\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 0,0,0,3\right] \;\; ,$$

тоді

$$x_1^{opt} = \frac{z_1^{opt}}{z_0 \frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{7}}},\;\; x_2^{opt} = \frac{z_2^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{7}} = 0,$$

$$x_3^{opt} = \frac{z_3^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{7}} = 0,\;\; x_4^{opt} = \frac{z_4^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{7}} = 0,$$

$$x_5^{opt} = \frac{z_5^{opt}}{z_0} = \frac{3}{\frac{1}{7}} = 21.$$

Для отримання розв'язку задачі на мінімум зауважимо, що поточний план Z_1 розв'язку задачі симплекс-методом на максимум (Таблиця 2), є розв'язок задачі на мінімум, оскільки всі оцінки у симплекс таблиці є недодатними.

Остаточно маємо:

$X_{opt}^{max} = [4{,}0{,}0],\ W_I^{max} = \frac{8}{7}, X_{opt}^{min} = [0{,}0{,}4], W_I^{min} = -\frac{4}{23}.$

Модельний приклад № 2.
Знайти розв'язок задачі

$$W_I = \frac{2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1} \to opt(\,max,\ \ min),$$

$$\Omega_I\!: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Маємо задачу дробово-лінійної оптимізації. В системі обмежень перейдемо від обмежень-нерівності до обмежень-рівнянь:

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 \le 1, \end{cases} \Rightarrow \Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 + x_6 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Позначимо $z_0 = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1}$, та введемо нові змінні:

$$z_1 = z_0 x_1,\ z_2 = z_0 x_2,\ \ldots,\ z_5 = z_0 x_5,\ z_6 = z_0 x_6 \quad (9)$$

В такому разі цільова функція додаткової задачі (2) приймає вигляд:

$$W_{I\,z} = 2z_1 - 3z_2 - z_3 + 3z_4 \to opt(\,max, min).$$

Обидві частини рівнянь системи обмежень (4) помножимо на z_0 і перейдемо до нових змінних (5).

Додаткова задача (2) приймає вигляд:

$$W_{I\,z} = 2z_1 + 3z_2 - z_3 + 3z_4 \to opt(\,max, min)$$
$$\left[\Omega_{I\,z}\!: \begin{cases} -5z_0 + z_1 - z_2 + 3z_3 + 4z_4 + z_5 = 0, \\ -z_0 + 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 - z_4 + z_6 = 0, \end{cases} \right. \qquad (10)$$
$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1,$$
$$z_j \ge 0,\ \ z_0 > 0, j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Відомо, що для початку розв'язку задачі лінійної оптимізації симплекс-методом необхідно отримати первісний опорний план z_0. Для його знаходження використовуємо метод повного виключення Жордано-Гаусса. (Таблиця 3).

Таблиця 3 – Розрахунок за методом повного виключення Ж.-Гаусса

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	b	$\sum$
	–5	1	–1	3	4	1	0	0	3
	–1	2	4	–5	–1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	0	1	6
W_{iz}	0	2	–3	–1	3	0	0	0	
	–8	–2	–4	0	1	1	0	–3	–15
	4	7	9	0	4	0	1	5	30
	1	1	1	1	1	0	0	1	6
W_{iz}	1	3	–2	0	4	0	0	1	

Маємо $z_0 = [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0, -3,\ 5].$

В таблиці 4 наведено симплекс-розрахунок додаткової задачі (6) на максимум.

Оптимальний розв'язок додаткової задачі (6) рівний:

$$z_{opt} = z_2\ = \left[\frac{4}{9}, 0{,}0{,}0, \frac{5}{9}, 0{,}1\right],$$

тоді

$$x_1^{opt} = \frac{z_1^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{4}{9}} = 0,\ x_2^{opt} = \frac{z_2^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{4}{9}} = 0,$$

$$x_3^{opt} = \frac{z_3^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{4}{9}} = 0,\ x_4^{opt} = \frac{z_4^{opt}}{z_0} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4},$$

$$x_5^{opt} = \frac{z_5^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{4}{9}} = 0,\ x_6^{opt} = \frac{z_6^{opt}}{z_0} = \frac{01}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}.$$

Таблиця 4 – Симплекс-розрахунок задачі (6) на максимум

Basis	*C*	*B*	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
			1	3	–2	0	4	0	0
a_5	0	–3	–8	–2	–4	0	1	1	0
a_6	0	5	4	7	9	0	4	0	1
a_3	0	1	1	1	1	1	1	0	0
Δ_j	$W_I(Z_0) = -1$		–1	–3	2	0	–4	0	0
a_0	1	3/8	1	1/4	1/2	0	– 1/8	– 1/8	0
a_6	0	7/2	0	6	7	0	9/2	1/2	1
a_3	0	5/8	0	3/4	1/2	1	9/8	1/8	0
Δ_j	$W_I(Z_1) = -5/8$		0	–11/4	5/2	0	–33/8	– 1/8	0
a_0	1	4/9	1	1/3	5/9	1/9	0	– 1/9	0
a_6	0	1	0	3	5	–4	0	0	1
a_4	4	5/9	0	2/3	4/9	8/9	1	1/9	0
Δ_j	$W_I(Z_2) = 5/3$		0	0	13/3	11/3	0	1/3	0

В таблиці 5 наведено симплекс-розрахунок додаткової задачі (6) на мінімум.

Таблиця 5 – Симплекс-розрахунок задачі (6) на мінімум

Basis	*C*	*B*	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
			1	3	–2	0	4	0	0
a_5	0	–3	–8	–2	–4	0	1	1	0
a_6	0	5	4	7	9	0	4	0	1
a_3	0	1	1	1	1	1	1	0	0
Δ_j	$W_I(Z_0) = -1$		–1	–3	2	0	–4	0	0
a_0	1	3/8	1	1/4	1/2	0	– 1/8	– 1/8	0
a_6	0	7/2	0	6	7	0	9/2	1/2	1
a_3	0	5/8	0	3/4	1/2	1	9/8	1/8	0
Δ_j	$W_I(Z_1) = -5/8$		0	–11/4	5/2	0	–33/8	– 1/8	0
a_0	1	1/8	1	– 5/28	0	0	–25/56	– 9/56	– 1/14
a_2	–2	1/2	0	6/7	1	0	9/14	1/14	1/7
a_3	0	3/8	0	9/28	0	1	45/56	5/56	– 1/14
Δ_j	$W_I(Z_2) = -15/8$		0	–137/28	0	0	–321/56	–17/56	– 5/14

Оптимальний розв'язок додаткової задачі (6) на мінімум рівний:

$$z_{min}\ = z_2 = \left[\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, 0{,}0{,}0\right],$$

тоді

$$x_1^{opt} = \frac{z_1^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0,\ x_2^{opt} = \frac{z_2^{opt}}{z_0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4\ ,$$

$$x_3^{opt} = \frac{z_3^{opt}}{z_0} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}} = 3,\ x_4^{opt} = \frac{z_4^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0,\ x_5^{opt} = \frac{z_5^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0,\ \ x_6^{opt} = \frac{z_6^{opt}}{z_0} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0$$

Маємо: $X_{opt}^{max} = \left[0{,}0{,}0, \frac{5}{4}\right], W_I^{max} = \frac{5}{3},$

$X_{opt}^{min} = [0,4,3,0]$, $W_I^{min} = -\frac{15}{8}$.

У двовимірному випадку задачу дробово-лінійної оптимізації можливо розв'язати графічно та виконати графічну інтерпретацію розв'язку.

Дробово-лінійною задачею оптимізації двох змінних формулюють наступним чином: знайти такий план $X_{opt} = [x_1, x_2]$, який надає цільовій функції $W_1(X_{opt}) = W_1^{opt}$ оптимального значення

$$W_I = \frac{P_2(x_1,x_2)}{Q_2(x_1,x_2)}\frac{\sum_{j=1}^{2} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{2} d_j x_j} \to opt(max, min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_{m,I} \end{cases} \qquad (11)$$

$$x_j \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \ j = 1,2,$$

$$c_j, \ d_j \ b_i \ a_{ij} \ - const, \quad \sum_{j=1}^{2} d_j x_j \ne 0$$

Розглядаємо розв'язок та геометричну інтерпретацію розв'язку задачі з двома змінними. Можливі два випадки:

Цільова функція задачі є однорідною функцією вигляду:

$$\mathrm{W_I} = \frac{\mathrm{P_2(x_1,x_2)}}{\mathrm{Q_2(x_1,x_2)}} = \frac{\mathrm{c_1x_1+c_2x_2}}{\mathrm{d_1x_1+d_2x_2}} \to \mathrm{opt(max, min)} \quad (12)$$

Цільова функція задачі є неоднорідною функцією вигляду:

$$W_I = \frac{P_2(x_1,x_2)}{Q_2(x_1,x_2)} = \frac{c_1x_1+c_2x_2+c_0}{d_1x_1+d_2x_2+d_0} \to opt(max, min) \quad (13)$$

Спочатку розглянемо випадок коли цільова функція задачі є однорідною функцією (12). Відомо, що розв'язок системи обмежень Ω_I задачі (11) є опукла множина, обмежена прямими лініями, яку також називають поліедром. У загальному випадку Ω_I геометрично зображують як многокутник (Рис. 1)

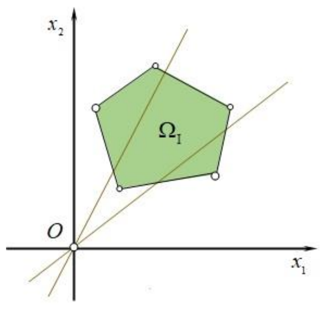

Рис.1. Графічний метод розв'язку задачі (11)

Щоб надати геометричну інтерпретацію поведінки цільової функції (12), розв'яжемо це рівняння відносно x_2:

$$(W_I d_1 x_1 + W_1 d_2 x_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

$$(W_I d_2 - c_2) x_2 = c_1 - (W_I d_1) x_1,$$

$$x_2 = \frac{c_1 - W_I d_1}{W_I d_2 - c_2} \ x_1.$$

Введемо позначення

$$k_{12} = \frac{c_1 - W_I d_1}{W_I d_2 - c_2},$$

тоді дістанемо рівняння прямої ω

$$\omega: x_2 = \ k_{12} \ x_1,$$

яка проходить через початок координат O.

Надаючи різних значень цільовій функції W_I, отримаємо пучок прямих з центром в точці O початку координат. Сутність геометричного розв'язку двовимірної задачі дробово-лінійної оптимізації полягає в знаходженні такої прямої, яка відповідає оптимальному значенню W_I, і водночас належить поліедру Ω_I. Такою прямою, яку прийнято називати опорною (Рис.2), буде пряма, котра торкається вершини Ω_I або проходить через сторону поліедра, що відповідає випадку альтернативного мінімуму, (Рис. 3)

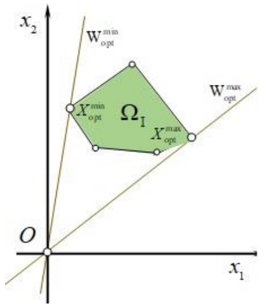

Рис.2

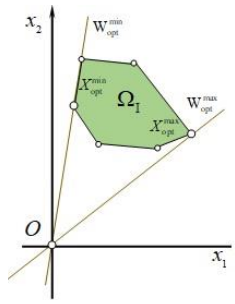

Рис.3

Координати вершин, через які проходить опорна пряма, й дають оптимальні плани розв'язку задачі. В залежності в двовимірної системи обмежень, можливі наступні випадки: (Рис. 4, 5, 6,7).

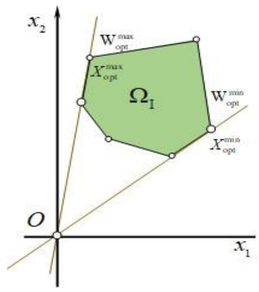

Рис.4

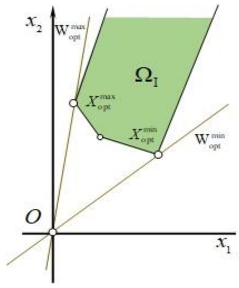

Рис.5

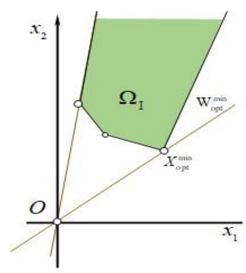

Рис.6

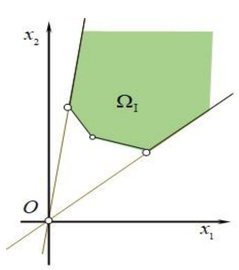

Рис.7

Область припустимих значень Ω_I обмежена, існують два альтернативних оптимуму, які набуваються в точках двох сторін поліедру Ω_I.(Рис. 4)

Область припустимих значень Ω_I необмежена, існують дві кутові вершини, які надають цільовій функції оптимальних значень. (Рис. 5)

Область припустимих значень Ω_I необмежена, існує тільки одна кутова вершини, яка надає цільовій функції оптимального(мінімум) значення. Другий оптимум (максимум) відповідає випадку асимптотичного максимуму. (Рис. 6).

Область припустимих значень Ω_I необмежена. Оптимуми є асимптотичними. (Рис. 7).

Розглянемо приклади геометричного розв'язку задач дробово-лінійної оптимізації у разі однорідної цільової функції.

Модельний приклад № 3.

Розв'язати задачу оптимізації:

$$W_I = \frac{2x_1-3x_2}{x_1+5x_2} \to opt(\,max, min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -6x_1 + 11x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 20 \end{cases},$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Будуємо поліедр Ω_I. (Рис. 8) Зобразивши пряму $x_1 + 5x_2 = 0$, пересвідчуємось в тому, що вона не перетинає поліедр, тобто знаменник цільової функції не приймає нульових значень на припустимій множині Ω_I.

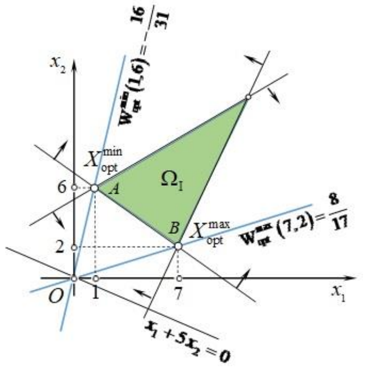

Рис.8. Графічний метод розв'язку

Оскільки цільова функція задачі є однорідною функцію, то через початок координат проводимо дві опорні прямі до поліедру Ω_I. Обчислюємо координати опорних вершин A та B:

$$A: \begin{cases} -6x_1 + 11x_2 = 60, \\ 2x_1 + 3x_2 = 20, \end{cases} \Leftrightarrow A(1,6)$$

$$B: \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 = 20, \end{cases} \Leftrightarrow B(7,2)$$

Обчислюємо значення цільової функції в цих точках:

$$W_I(1,6) = \frac{2*1-3*6}{1+5*6} = -\frac{16}{31},$$

$$W_I(7,2) = \frac{2*7-3*2}{7+5*2} = \frac{8}{17},$$

Маємо:

$$X_{opt}^{min}(1,6), W_{opt}^{min}(1,6) = -\frac{16}{31},$$

$$X_{opt}^{max}(7,2), W_{opt}^{max}(7,2) = \frac{8}{17}.$$

Модельний приклад № 4.

Розв'язати задачу дробово-лінійної оптимізації:

$$W_I = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2} \to opt(\,max, min)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 33, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 43, \\ 5x_1 - x_2 \le 37, \\ x_1 - 3x_2 \le -1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Будуємо поліедр Ω_I. (Рис. 9) Зображавши пряму $3x_1 + x_2 = 0$, пересвідчуємось в тому, що вона не перетинає поліедр, тобто знаменник цільової функції не приймає нульових значень на припустимій множині Ω_I.

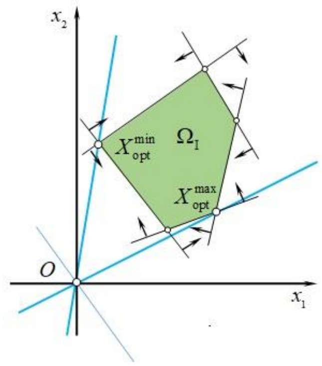

Рис.9. Графічний метод розв'язку

Цільова функція задачі є однорідною функцію, тому через початок координат проводимо дві опорні прямі до поліедру Ω_I. Обчислюємо координати опорних вершин:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 33, \\ -2x_1 + 3x_2 = 19, \end{cases} \Leftrightarrow X_1(1,7),$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 37, \\ x_1 - 3x_2 = -1, \end{cases} \Leftrightarrow X_2(8,3)$$

Обчислюємо значення цільової функції в цих точках:

$$W_I(1,7) = \frac{1-2*7}{3*1+7} = -\frac{13}{10},$$

$$W_I(8,3) = \frac{8-2*3}{3*8+3} = \frac{2}{27}.$$

Маємо:

$$X_{opt}^{min}(1,7), W_{opt}^{min}(1,7) = -\frac{13}{10},$$

$$X_{opt}^{max}(8,3), W_{opt}^{max}(8,3) = \frac{2}{27}.$$

Якщо цільова функція є неоднорідною, то розв'яжемо це рівняння відносно x_2, дістанемо:

$$W_I d_1 x_1 + W_1 d_2 x_2 + W_I d_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0,$$

$$(W_I d_2 - c_2) x_2 = (c_1 - W_I d_1) x_1 + (c_0 - W_I d_0),$$

$$x_2 = \frac{c_1 - W_I d_1}{W_I d_2 - c_2} x_1 + \frac{c_{10} - W_I d_0}{W_I d_2 - c_2}.$$

Введемо позначення

$$k = \frac{c_1 - W_I d_1}{W_I d_2 - c_2}, b = \frac{c_0 - W_I d_0}{W_I d_2 - c_2},$$

отримаємо рівняння:

$$x_2 = k x_1 + b.$$

Ця пряма вже не проходить через початок координат, як у випадку однорідної функції. Випадок неоднорідної цільової функції можливо звести до однорідної функції перетворенням системи координат вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + \alpha, \\ x_2 = x_{02} + \beta. \end{cases}$$

Цільова функція для неоднорідної функції приймає вигляд:

$$W_I = \frac{c_1(x_{01}+\alpha)+c_2(x_{02}+\beta)+c_0}{d_1(x_{01}+\alpha)+d_2(x_{02}+\beta)+d_0} = \frac{c_1\alpha+c_2\beta+(c_1x_{01}+c_2x_{02}+c_0)}{d_1\alpha+d_2\beta+(d_1x_{01}+d_2x_{02}+d_0)}.$$

Якщо дібрати x_{01} та x_{02} такими, щоб вирази у дужках були рівні нулю

$$\begin{cases} c_1 x_{01} + c_2 x_{02} + c_0 = 0, \\ d_1 x_{01} + d_2 x_{02} + d_0 = 0, \end{cases}$$

То цільова функція стане однорідною

$$W_I = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0} \to \frac{c_1 \alpha + c_2 \beta}{d_1 \alpha + d_2 \beta}$$

в новій системі координат $O_n \alpha \beta$ початок, якої знаходиться в точці $O_n(x_{01}, x_{02})$. Прямі лінії $x_2 = k$ $x_1 + b$ пройдуть через новий початок координат O_n.

Сумарний алгоритм розв'язку для неоднорідної цільової функції $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0$ має наступні кроки:

Побудуємо поліедр Ω_I і пряму лінію $d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0 = 0$, яка не повинна перетинати поліедр.

Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} c_1 x_{01} + c_2 x_{02} + c_0 = 0 \\ d_1 x_{01} + d_2 x_{02} + d_0 = 0, \end{cases}$$

і знаходимо координати $O_n(x_{01}, x_{02})$ центра пучка прямих.

Через точку центра $O_n(x_{01}, x_{02})$ проводимо опорні прямі лінії до поліедра Ω_I.

Знаходимо оптимальні вершини та їх координати.

Обчислюємо значення цільової функції в цих точках та порівнюємо їх.

Модельний приклад № 5.

Розв'язати задачу дробово-лінійної оптимізації:

$$W_I = \frac{3x_1 + 2x_2 - 6}{x_1 + x_2 - 1} \to opt(max, min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 30, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 26, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 62, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Будуємо поліедр Ω_I. (Рис. 10).

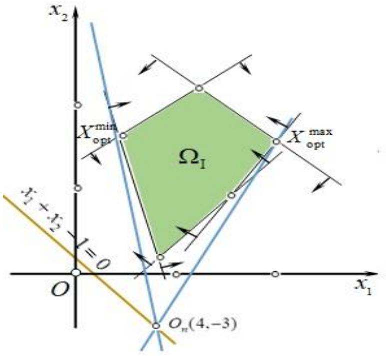

Рис.10. Графічний метод розв'язку

Визначаємо координати центра пучка прямих з розв'язку системи:

$$\begin{cases} 3x_{01} + 2x_{02} - 6 = 0, \\ x_{01} + x_{02} - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow O_n(x_{01}, x_{02}) \Leftrightarrow O_n(4, -3).$$

З точки центра пучка $O_n(4, -3)$ проводимо опорні прямі лінії до поліедра Ω_I. Знаходимо координати опорних вершин поліедра:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 30, \\ -3x_1 + 4x_2 = 26, \end{cases} \Leftrightarrow (2{,}8),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 62, \\ 4x_1 - 3x_2 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow (10{,}8).$$

Обчислюємо значення цільової функції в цих точках:

$$W_I(2{,}8) = \frac{16}{9},$$

$$W_I(10{,}8) = \frac{40}{17},$$

та порівнюючи ці значення, здобуваємо відповідь.

Маємо:

$$X_{opt}^{min}(2{,}8), W_{opt}^{min}(2{,}8) = \frac{16}{9},$$
$$X_{opt}^{max}(10{,}8), W_{opt}^{max}(10{,}8) = \frac{40}{17}.$$

Висновки. Дробово-лінійна оптимізація є потужним інструментом у сфері управління проєктами, особливо коли йдеться про оптимізацію складних співвідношень між витратами, часом та якістю. Вона дозволяє досягати високих результатів у проєктному управлінні, забезпечуючи ефективний розподіл ресурсів та мінімізацію ризиків. Незважаючи на складність, цей метод має великий потенціал для подальшого розвитку і широкого застосування у практиці управління проєктами.

Список літератури

1. Goyer O. Modern view of project management problems. *Actual problems of international relations*. 2012. Issue 111(2), pp. 125–135. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/apmv_2012_111(2)__17.
2. Oghirko O., Krap-Spisak N. Information technology of project management. *Bulletin of the Lviv Polytechnic National University. Computer Science and Information Technology*. 2016. No. 843, pp. 57–64. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VNULPKNIT_2016_843_10.
3. Pandian P., Natarajan. A new method for finding an optimal solution for transportation problems. *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*. 2010. 4(2), pp. 59–65.
4. Rodashchuk G., Kontseba S., Lischuk R., Skurtol S. Network planning in IT project management. *Taurian Scientific Bulletin. Series: Technical Sciences*. 2023. No. 1, pp. 42–56.
5. Tripathi M., Kumar A. Systematic literature review of software project management performance measurement. *Journal of Software Engineering Research and Development*. 2019. No. 7(1).
6. Smetaniuk O., Bondarchuk A. Peculiarities of the project management system in IT companies. *Agrosvit*. 2020. URL: http://www.agrosvit.info/index.php?op=1&z=3205&i=14.
7. Bushuyev S., Ivko A. Construction of models and application of syncretic innovation project management in the era of artificial intelligence. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2024. 3(3(129)), pp. 44–54.
8. Bushuyev S., Ivko A. Values Spiral Development Method in the Implementation of Digitalization Projects in Syncretic Methodology. *International Journal of Computing*. 2024. 23(2), pp. 177–186.
9. Bushuyev S., Onyshchenko S., Bushuyeva N., Bondar A. Modelling projects portfolio structure dynamics of the organization development with a resistance of information entropy. *International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies*. 2021. Vol. 2, pp. 293–298. doi: 10.1109/CSIT52700.2021.
10. Abd-Elhameed W., Ali A. New Specific and General Linearization Formulas of Some Classes of Jacobi Polynomials. *Mathematics*. 2021. 9(1), p. 74. doi: 10.3390/math9010074.
11. Hahnloser R. Learning algorithms based on linearization network. *Computation in Neural Systems*. 1998. 9(3), pp. 363–380. doi: 10.1088/0954-898X_9_3_006.
12. Ghaoui L., Oustry F., AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1997. Vol. 42, No. 8, pp. 1171–1176. doi: 10.1109/9.618250.

Надійшла (received) 10.11.2024

Відомості про авторів (About authors)

Чернова Любава Сергіївна (Chernova Liubava) – доктор технічних наук, доцент, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій; м. Миколаїв, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5191-0272; e-mail: 19chls92@gmail.com.

Титов Сергій Дмитрович (Titov Sergiy) –доцент, Національний університет кораблебудування імені Адмірала Макарова, доцент кафедри вищої математики; м. Миколаїв,Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8772-9889; e-mail: ss1-ss10@ukr.net.

Журавель Ірина Анатоліївна (Zhuravel Iryna) – Ph. D., кафедра управління проєктами, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова; м. Миколаїв, Україна; ORCID: 0000-0002-3747-4387; e-mail: iagurav@gmail.com.

Чернова Людмила Сергіївна (Chernova Liudmyla) – доктор технічних наук, професор, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, професор кафедри інформаційних управляючих систем та технологій; м. Миколаїв, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0666-0742; e-mail: 19chsk56@gmail.com